Le Théorème de Gödel

Table of Contents

Biographie

Kurt Gödel est né le 28 avril 1906 à Brno, à 180 km au sud−est de Prague (Empire Austro−Hongrois, aujourd'hui situé en république tchèque). Il est le fils cadet de deux enfants de Rudolf et Marianne Gödel, des allemands expatriés travaillant dans l'industrie textile.


Rudolf et Kurt (1908)


Marianne, Kurt, Rudolf père et Rudolf fils (de droite à gauche) − 1910

Son père à force de travail devint directeur puis actionnaire d'une grande usine de textile de Brno. Il eut donc les moyens d'envoyer ses deux fils dans des écoles privés allemandes où ils firent de brillantes études. Contrairement à l'idée fort répandue selon laquelle les génies font des études médiocres, Kurt Gödel a été un élève brillant. Durant toute sa scolarité primaire et secondaire, Kurt n'aura qu'une seule fois une note inférieure au maximum en mathématiques. Malgré cela, son caractère très introverti fait qu'il ne se fait que peu remarquer.
En 1924, son diplôme du lycée technique de Brno en poche, Gödel va rejoindre son frère à Vienne. Celui ci avait commencé des études de médecine quatre ans plus tôt. Inscrit en Physique, Gödel s'oriente assez rapidement vers les mathématiques. Il obtient son titre de docteur en 1929, à 23 ans, sous la tutelle de Hahn. Avec sa thèse et son traité "*Über formal unentscheitbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*" (Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés) publié comme article en allemand en 1931 et présenté comme thèse d'habilitation à l'enseignement en 1932, Gödel acquiert une réputation

internationale.

Dans son article de 1931, Gödel révolutionne les mathématiques en montrant que certaines propositions vraies pour les nombres naturels sont indémontrables. On pourrait se dire que si on découvre un théorème vrai et indémontrable, il suffit de la prendre comme axiome. Cela ne sert à rien car Gödel a démontré qu'alors de nouvelles propositions vraies sur ces nombres restent indémontrables. Il remet en cause plus d'un siècle de recherches en mathématiques et la tentative de David Hilbert de formaliser entièrement les mathématiques. Pour Gödel cela montre que la démonstration de théorèmes mathématiques ne peut−être que mécanique et que l'intuition est nécessaire. Les concepts et méthodes introduits par Gödel sont au centre de la théorie des récurrences, fondamentale en informatique. En 1933 et 1934 Gödel enseigne son théorème d'incomplétude à Princeton. Plusieurs dépressions nerveuses l'empêchent d'enseigner jusqu'au printemps 1937, à Vienne. Il semble que Gödel ait été hypocondriaque et paranoïaque. En septembre 1938, Gödel épouse Adèle Porkert, une danseuse qu'il a rencontrée durant ses études à Vienne. Elle est sont aînée de 6 ans, Catholique et divorcée. Les parents de Gödel désapprouvent ce mariage.

Adèle et Kurt Gödel −1938

Peu de temps après, il retourne aux États−Unis présenter ses derniers résultats montrant que l'axiome du choix et l'hypothèse du continu sont compatibles avec les autres axiomes de la théorie des ensembles. Pendant son année aux États−Unis, son autorisation d'enseigner lui est retirée en Autriche et pendant l'été 1939, alors qu'il retrouve sa femme à Vienne, il est déclaré apte au service dans les forces armées nazies. Gödel, dans son isolement, n'avait jusque là pas mesuré la gravité des événements autour de lui. Sans emploi, incorporable, il obtient un visa de sortie. En janvier 1940, le couple s'enfuit vers les États−Unis en prenant le Transsibérien et un bateau pour San Francisco depuis Yokohama.

En 1948, Gödel obtient la nationalité américaine. Il y a une anecdote qui raconte que Morganstern Oskar conduisant Von Neumann et Gödel à l'interview de naturalisation leur demanda s'ils avaient des questions à poser. Gödel répliqua qu'il n'avait pas de question mais qu'il avait trouvé des inconsistances logiques dans la constitution des États−Unis et qu'il voulait poser la question à l'officier d'immigration. Morganstern l'invita fermement à ne faire que répondre et non pas poser des questions. Ce n'est qu'en 1953 que Gödel fut nommé professeur. La même année il fût élu à l'académie des sciences. Sa maladie mentale ne s'arrange pas et pendant des années, son ami Albert Einstein s'est occupé de lui, notamment avec des promenades quotidiennes qui apaisaient beaucoup Gödel.

Kurt Gödel et Albert Einstein

A partir de son arrivée aux États−Unis, Gödel délaisse la théorie des ensembles pour étudier la relativité, avec son ami de Princeton Albert Einstein, et les implications philosophiques de ses travaux. Gödel est ainsi connu parmi les physiciens pour avoir démontré que le voyage vers le passé est possible dans le cadre des équations de la relativité générale d'Einstein.

Gödel frôle la mort en 1950 parce que méfiant envers les médecins, il ne traite pas un grave ulcère. Son dernier article scientifique date de 1958. Il s'isole alors progressivement alors que se développe sa paranoïa et son hypocondrie. En juillet 1976, Gödel atteint l'âge de la retraite (70 ans) alors que sa femme qui l'a tant materné, est handicapée par un accident cérébral. Il la soigne avec dévouement jusqu'en juillet 1977 lorsqu'elle est opérée d'urgence et obligée de passer 6 mois à l'hôpital. Gödel se retrouve seul avec sa maladie mentale grandissante. Par peur d'un empoisonnement, il refuse de s'alimenter et meurt le 14 janvier 1978.

Accueil | Biographie | Tout sur le théorème | Conséquences du théorème | Le théorème d'un peu plus près | Le jeu des allumettes | Pour en savoir plus

Théorème

Tout sur le théorème de Gödel

Énoncé simplifié du théorème d'incomplétude

Dans toute branche des mathématiques suffisamment complexe (par exemple l'arithmétique), il existe une infinité de faits vrais qu'il est impossible de prouver en utilisant la branche des mathématiques en question.

Bien évidement le théorème tel qu'il a été écrit par Gödel est plus précis, de même que la preuve qu'il en a donné. L'idée de cette preuve est néanmoins accessible, et nous en donnons plus loin une esquisse.

Qu'a fait Gödel avec son théorème ?

Jusqu'au début du siècle les mathématiciens étaient persuadés qu'on pouvait, un peu à la manière des écoliers en géométrie, démontrer toutes les vérités mathématiques par déduction.

Gödel a démontré en 1931 deux résultats mathématiques :

- Il se peut que dans certains cas, on puisse démontrer une chose et son contraire (inconsistance).
- Il existe des vérités mathématiques qu'il est impossible de démontrer (incomplétude)

Le plus célèbre de ces résultats est le second, qu'on appelle théorème d'incomplétude de Gödel.

Quelques définitions

- Système formel
- Preuve

- Machine de Turing
- Programme informatique

Une preuve simplifiée du théorème

Malgré les performances et la diversité des ordinateurs actuels, tous ont un modèle théorique commun appelé machine de Turing. On peut donner à une machine de Turing un programme arbitrairement long, mais évidemment de taille finie, qui répond VRAI ou FAUX à une affirmation qu'on lui donne, sans jamais se tromper.
La question est:
Si un humain est capable de savoir si la phrase qu'il donne à la machine est vraie ou fausse, la machine est−elle aussi capable de découvrir la vérité ?

Gödel donne alors la phrase suivante à la machine:
"La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase"

Que fait la machine ?

- Si elle répond VRAI, elle affirme que "La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase" est une affirmation vraie. Or ce n'est pas le cas, puisqu'elle vient justement de répondre VRAI à la phrase. Si la machine ne se trompe pas, elle ne peut donc pas répondre VRAI.

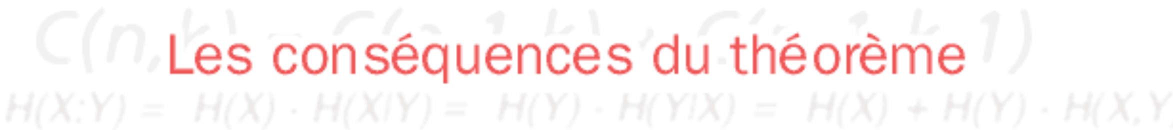
- Si elle répond FAUX, elle affirme que "La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase" est une affirmation fausse. Or l'affirmation n'est pas fausse puisque la machine vient justement de répondre FAUX. Si la machine ne se trompe pas, elle ne peut donc pas répondre FAUX.

Et nous, pouvons nous répondre à la question ?...
La phrase dit : "La machine ne répondra jamais VRAI à cette phrase". Nous venons de voir qu'en effet, la machine ne peut pas répondre VRAI. Nous savons donc que cette phrase est une vérité. Pourtant la machine ne pourra pas la découvrir...

Le théorème d'un peu plus près

Accueil | Biographie | Tout sur le théorème | Conséquences du théorème | Le théorème d'un peu plus près | Le jeu des allumettes | Pour en savoir plus

Le Théorème de Gödel : Les conséquences



Les deux théorèmes de 1931 de Gödel sur l'inconsistance et l'incomplétude de l'arihtmétique du premier ordre ont eu des répercussions importantes sur la pensée philiosophique moderne.

La première conséquence de ces théorèmes est que la Vérité ne peut pas être exprimée en terme de démonstrabilité. Une chose prouvable n'est pas nécéssairement vraie et une chose vraie n'est pas toujours prouvable. Beaucoup de philisophes ont pensé le contraire et ont essayé de définir la vérité comme étant égale aux choses démontrables. De manière générale, dans quasiment toutes les entreprises intellectuelles conséquentes, on peut exprimer des arguments mathématiques simples et on risque donc de rentrer dans le cadre du théorème de Gödel. Je peux ainsi prétendre des choses fausses sans qu'on ne puisse démontrer le contraire.

De la même manière, je peux prétendre des choses vraies sans pouvoir me justifier par une démonstration De la même manière que l'ensemble des vérités est plus important que l'ensemble de ce qui est démontrable, la réalité est plus importante que l'ensemble des connaissances possibles. Contrairement aux enseignements de nombreux philosophes, être raisonné n'est pas simplement une question de règles. La raison est créative et originale. Pour trouver des vérités dans un système donné, il faut pouvoir s'en extraire et pour cela il faut une raison qui soit capable non pas de simplement rajouter des axiomes à un système mais d'en créer un nouveau dans lequel l'ancienne vérité indémontrable deviendra au contraire tout à fait démontrable.

De nombreuses pages ont été écrites sur les implications philosophiques et mathématiques des Théorèmes de Gödel. Voici un lien vers une page web qui décrit en quelques points les bétises qui ont pu être dites à partir de ces théorèmes... Allez−y, c'est assez amusant.

Accueil | Biographie | Tout sur le théorème | Conséquences du théorème | Le théorème d'un peu plus près | Le jeu des allumettes | Pour en savoir plus

Le Théorème de Gödel : Le théorème d'un peu plus près

La géométrie d'Euclide

Tous les écoliers le savent, la géométrie est une discipline *déductive*. Elle se différencie en cela des sciences physiques, par exemple, qui sont une science en partie expérimentale car on peut vérifier la véracité de ce que l'on affirme par l'expérience.

D'aucun répondront qu'on peut faire de même en géométrie : mesurer un angle, les côtés d'un triangle...Eh bien, oui et non... Ce qui a fait le succès de la géométrie et le malheur de nombreux écoliers depuis les Grecs c'est la *méthode axiomatique* utilisée par Euclide, qui permet de démontrer en géométrie des théorèmes en utilisant uniquement la logique de l'esprit et des axiomes de base (axiomes d'Euclide par exemple) comme le fameux :

"Par deux points, on ne mène qu'une droite"

Ce type de démonstration se passe de vérification par l'expérience. Le côté évidement vrai des axiomes et la logique normalement implacable de la déduction font que le résultat obtenu ne peut être que vrai, ce qui a fait de la géométrie Euclidienne un modèle de connaissance scientifique pendant 2000 ans.

On pensait encore, il y a 200 ans, que toutes les branches des mathématiques, à l'instar de la géométrie, pouvaient être *axiomatisées* et qu'on pouvait déduire logiquement de ces axiomes toutes les vérités concernant la discipline en question.

Mais au 19ème siècle, certains scientifiques ont remplacé un des axiomes d'Euclide :

> "par un point donné, on fait passer exactement une parallèle à une droite donnée"

par un autre énoncé, comme par exemple celui de Riemann :

> "par un point hors d'une droite, on ne peut faire passer aucune parallèle à cette droite"

En utilisant le nouveau jeu d'axiomes comme vérités de base, on peut déduire, comme en géométrie Euclidienne, des théorèmes, dont certains seront faux dans notre monde, puisqu'ils sont déduis d'un axiome faux dans notre monde (ce qui n'exclu pas qu'ils soient justes dans un monde imaginaire dans lequel les axiomes seraient vrais).

Ce phénomène a fait prendre conscience aux mathématiciens que la géométrie était une chose "palpable", dont les affirmations, énoncés et théorèmes n'étaient pas vides de sens, et que ce sens "intuitif" pouvait les gêner dans leur tâche qui consiste à déduire une chose de certaines autres, sans forcément se soucier de la véracité des faits démontrés.
Or on sait qu'il faut se méfier de l'intuition et du « C'est clair ! » des profs de maths, comme le montre l'exemple suivant dû à Russel :

> Il y a deux sortes d'ensembles, les ensembles normaux, qui ne se contiennent pas eux même, comme l'ensemble des mots de ce texte, et les ensembles non−normaux, qui se contiennent eux même, comme l'ensemble des choses dont on parle dans ce texte (en effet, je viens d'en parler). Considérons à présent N, l'ensemble des ensembles normaux. La question est : N est−il normal ?
>
> - Si N est normal, alors, il est dans N puisque N est l'ensemble des ensembles normaux. N se contient donc lui−même et par conséquent N est non−normal.
> - Au contraire, si N est non−normal, alors il se contient lui−même, or les éléments de N sont les ensembles normaux, donc N est normal.

Où est passée l'intuition...?

La tentative de Hilbert

Afin de trouver une solution à un certain nombre de ces problèmes, Hilbert a proposé au début du siècle un programme de recherche visant entre autres à formaliser les mathématiques, c'est à dire à définir les termes utilisés de façon non ambigu et sans faire appel à l'intuition.

Un des buts de Hilbert était d'obtenir des théories formelles en mathématiques, c'est à dire :

- un ensemble de règles pour écrire les formules
- un ensemble d'axiomes (formules de base qui représentent ce qu'on juge vrai) écrits dans le système formel
- un ensemble de règles de transformation qui permettent de passer d'une

formule à une autre, c'est à dire de déduire d'un axiome ou d'un théorème, un nouveau théorème

Les règles doivent être suffisamment précises pour être applicables mécaniquement, par une machine par exemple, sans faire appel à l'intelligence.
On pourrait ainsi programmer un ordinateur en lui donnant les règles et les axiomes, puis en lui demandant d'appliquer successivement toutes les règles à tous les axiomes, dans un processus éventuellement infini. L'ordinateur serait alors capable de lister tout ce qu'on peut déduire des axiomes, c'est à dire tous les théorèmes possibles de la théorie formelle.
Imaginons à présent que nous voulions savoir si une certaine formule F est un théorème, c'est à dire si elle peut être déduite des axiomes en utilisant une suite de déductions.
Quatre cas peuvent se présenter si nous utilisons l'ordinateur en question :

1. Il listera la formule F , et pas la formule non F
2. Il listera la formule non F , et pas la formule F
3. Il listera la formule F et la formule non F
4. Il ne listera ni la formule F , ni la formule non F

Dans le cas 1, cela signifie que la formule F est un théorème. Dans le cas 2, que la formule non F est un théorème. Que dire des autres cas ? Dans le cas 3, on dit que la théorie est inconsistante, c'est à dire qu'on peut à la fois prouver une chose et son contraire. Dans le quatrième cas, on dit que la théorie est incomplète, c'est à dire qu'il existe des choses dont on ne peut savoir si elles sont vraies ou non.

Un exemple concret de système formel, avec redéfinition des termes consistance et complétude est accessible ici.

La deuxième partie du programme de Hilbert consistait justement à démontrer que les théories formelles des mathématiques étaient consistantes.

Si beaucoup de travail a été réalisé en ce qui concerne la formalisation des mathématiques (des théories formelles pour de nombreuses branches des mathématiques ont été développées à partir du 19ème siècle, avant même le programme de Hilbert), il a fallu attendre les résultats de Gödel, assez inattendus, pour répondre entre autres à la deuxième partie du programme.

La réponse de Gödel

En 1931, dans un article intitulé "Über formal unentscheidbare Sâtze der Principia Mathematica und verwandter Systeme" (Sur les propositions formellement indécidables des Principia Mathematica et des systèmes apparentés) Gödel a démontré qu'il était impossible de prouver la consistance d'un certain nombre de théories formelles (dont l'arithmétique) en utilisant ces théories, contrairement à ce que semblait croire Hilbert. Ce premier résultat, très inattendu pour l'époque s'est accompagné d'un deuxième, plus célèbre, le théorème d'incomplétude qui énonce que la plupart des théories formelles (dont l'arithmétique), si elles sont consistantes, sont incomplètes, c'est à dire qu'il existe des résultats effectivement vrais qui ne peuvent pas être prouvés dans cette théorie.

Pour en revenir à notre ordinateur qui déduit des théorèmes, les résultats de Gödel prouvent que pour la plupart des théories formelles, il existe des formules F pour lesquelles l'ordinateur sera confronté au 3ème ou au 4ème cas.

On pourra en premier lieu consulter une démonstration simplifiée du théorème avant de lire ce qui suit.

Très basiquement, la démonstration de Gödel a consisté à écrire le paradoxe du menteur (Tous les crétois sont des menteurs, c'est un crétois qui le dit...) en utilisant l'arithmétique. Plus précisément, il a construit une formule de l'arithmétique qui affirme d'elle même qu'elle est indémontrable.

Le système formel qu'a utilisé Gödel pour sa démonstration est voisin de celui des Principia Mathematica de Whitehead et Russell. Ce système formel permet d'exprimer les relations arithmétiques courantes.
Nous ne referons pas bien sûr dans la suite la démonstration complète de Gödel qui est longue et difficile, mais nous essaierons d'en indiquer clairement les étapes.

La numération de Gödel et les métamathématiques

La première étape a consisté à assigner à chaque symbole du sytème formel un nombre différent. Puis Gödel a trouvé le moyen d'affecter un nombre à chaque formule (en faisant le produit des premiers nombres premiers élevés à la puissance du nombre représentant les symboles qui y figurent), puis à chaque suite de formule.
L'important est de comprendre qu'un nombre de Gödel étant donné, on peut déterminer si c'est une suite de formules (et si oui de quelles formules elle est composée), une formule (et si oui laquelle) ou un symbole.
Inversement, étant donné un symbole, une formule ou une suite de formules, on peut facilement calculer le nombre de Gödel associé.

Tous ces nombre qui représentent des formules ou des suites de formules représentent donc des faits de l'arithmétique, mais nous pouvons aussi nous intéresser à la méta−arithmétique, qui consiste à parler des faits qui concernent l'arithmétique. Par exemple, dire que

"Pour tout x, il existe y tel que y > 2x"

est un fait arithmétique, c'est à dire un fait qui concerne les nombres entiers. D'un autre côté, dire que

La formule "Pour tout x, il existe y tel que y > 2x" est démontrable en arithmétique

est un fait meta−arithmétiquen, c'est à dire un fait qui concerne l'arithmétique.

Les formules et suites de formules étant représentés par Gödel sous forme de nombres, celui−ci a ainsi pu exprimer des faits méta−arithmétiques par des formules arithmétiques... Par exemple, dire qu'une formule de nombre de Gödel *g1* contient la formule de nombre de Gödel *g2* revient plus ou moins, avec la méthode de Gödel à affirmer que *g2* est un diviseur de *g1*, ce qui une propriété arithmétique, exprimant un fait méta−arithmétique.
Gödel a ainsi réussi à exprimer, en utilisant les nombres de Gödel et l'arithmétique (mais la formule reste assez complexe) que :

La formule de nombre de Gödel *g1* est démontrable par la suite de formules de nombre de Gödel *g2*.

Dans la suite, nous appellerons cette formule G.

La preuve d'incomplétude

La suite du raisonnement a été de montrer que si G était était démontrable, alors la négation de G le serait aussi, et inversement. On aurait alors la possibilité de démontrer une formule et son constraire, ce qui est la définition de l'inconsistance vue plus haut. Par conséquent, si on suppose que le système formel employé est consistant (i.e. que l'arithmétique est consistante), alors on ne peut pas démontrer la formule G ni son contraire. On dit que G est indécidable. Or, la formule G dit que la formule G est indémontrable (rappellons la formule)

n : Il n'existe aucun nombre de Gödel qui représente une suite de formule qui soit la démonstration de la formule portant le nombre de Gödel *n* .

Cette affirmation métamathématique (disant que G est indémontrable) est manifestement vraie, comme nous venons de le voir. Et elle est representée par une formule arithmétique, selon la methode de Gödel, qui est donc vraie elle aussi...

Gödel a donc au final construit une fomule arithmétique qui est vraie, et qu'on ne peut pas démontrer en utilisant un système formel de l'arithmétique si celui−ci est consistant.

En allant un peu plus loin, Gödel a montré que même en posant comme axiome que G soit vraie, on pourrait toujours trouver une formule vraie et indémontrable, ce qui signifie que si l'arithmétique est consistante, non seulement elle est incomplète, mais le sera toujours même si on y ajoute des axiomes supplémentaires.

Inconsistance de l'arithmétique ?

Par un raisonnement un peu similaire, Gödel a construit une formule, exprimée dans le système formel qui affirme que :

Si l'arithmétique est consistante, alors la fomule G est vraie.

Puis il démontre cette affirmation, toujours en utilisant le système formel. Ceci implique que si on pouvait démontrer dans le système formel, que l'arithmétique est consistante, alors, en utilisant la preuve donnnée par Gödel, il s'en suivrait que G serait démontrable dans le système formel. Or nous venons de voir que ce n'était pas le cas. Par conséquent, c'est qu'il est impossible de démontrer dans le système formel que l'arithmétique est consistante, ce qui a apporté une réponse au problème de Hilbert...

Accueil | Biographie | Tout sur le théorème | Conséquences du théorème | Le théorème d'un peu plus près | Le jeu des allumettes | Pour en savoir plus

Le Théorème de Gödel : Le jeu des allumettes

On dispose un nombre n d'allumettes sur une table. Les joueurs A et B jouent chacun leur tour et peuvent retirer de 1 à 3 allumettes du tas. Le joueur qui retire la dernière allumette a gagné.

Exemple de partie

On dispose 10 allumettes. C'est au joueur A de commencer.

1. Le joueur A retire 2 allumettes, il en reste 8
2. Le joueur B retire 1 allumettes, il en reste 7
3. Le joueur A retire 3 allumettes, il en reste 4
4. Le joueur B retire 2 allumettes, il en reste 2
5. Le joueur A retire 2 allumettes, il n'en reste plus, le joueur A a gagné.

Le système formel

Afin de bien mieux comprendre le système formel en question, nous ferons souvent référence au parallèle avec le jeu des allumettes.
Néanmoins, il doit être bien compris que le système formel en lui même n'a aucun sens. C'est nous qui choisissons de lui en attribuer un, qui signifie quelque chose pour nous.

Les formules

Le vocabulaire de notre système sera les lettres A,B et les nombres entiers. Une formule correcte de notre système sera de la forme : "lettre lettre entier". Par exemple, AB14 et BB3 sont des formules bien formées, alors que 4B12 n'est pas une formule.

On peut trouver une signification à ces formules. Convenons que la formule AB12 signifie le joueur A peut gagner de façon sûre si c'est au joueur B de jouer et qu'il reste 12 allumettes. De la même façon, la formule BB6 signifiera : le joueur B peut gagner de façon sûre si c'est au joueur B de jouer et qu'il reste 6 allumettes.

Chacune de ces formules peut être vraie ou fausse. Nous verrons plus loin que la formule AA10 est vraie. En effet, le joueur A peut gagner de façon sûre si c'est à lui de jouer et qu'il reste 10 allumettes. Par contre, la formule AA8 est fausse, car le joueur 1 ne peut pas gagner de façon sûre si c'est à lui de jouer et qu'il reste 8 allumettes.

La négation des formules

Dans ce jeu, les formules ont une négation. Cela signifie qu'à toute formule on peut en associer une autre de façon à ce que si l'une est fausse, l'autre soit vraie et inversement. En effet, pour une position donnée (un nombre d'allumettes x et le nom du joueur (A ou B) qui va jouer), un des deux joueurs a forcément la possibilité de gagner. Ainsi, si ABx est vraie c'est que BBx est fausse, et si AAx est fausse c'est que BAx est vraie.

Les règles d'inférence

Comment déduire d'une formule vraie une autre formule vraie ? On voit bien que si AB16 est vraie, alors AA17 l'est aussi, car : Si A gagne alors que c'est à B de jouer et qu'il reste 16 allumettes, alors A gagne aussi si c'est à lui de jouer et qu'il en reste 17 (car il lui suffit d'en enlever une).
Voici la liste des règles d'inférence de notre système (n remplace n'importe quel entier):

1. ABn => AAn+1
2. ABn => AAn+2
3. ABn => AAn+3
4. ABn => ABn+4
5. BAn => BBn+1
6. BAn => BBn+2
7. BAn => BBn+3
8. BAn => BAn+4

Les Axiomes

Nous devons trouver les vérités de base de notre système. On peut les choisir arbitrairement, mais si on veut obtenir des formules qui signifient toujours quelque chose par rapport au jeu, il faut que nos axiomes soient vrais dans le jeu : AB4 et BA4 sont de bons axiomes, effectivement vrais dans le jeu, car le joueur A gagne forcément si c'est au joueur B de jouer et qu'il reste 4 allumettes et de même le joueur B gagne forcément si c'est au joueur A de jouer et qu'il reste 4 allumettes.

Testons notre théorie

Partant des axiomes et du système formel, on peut déduire un certain nombre de formules.

Par exemple, AB4 et vrai (c'est un axiome) donc AA5 est vraie aussi (en utilisant la règle 1), AB8 est vraie aussi (en utilisant la règle 4). On peut aussi enchaîner les règles : BA4 => BA8 => BB10

Avec nos 2 axiomes de base, et nos 8 règles d'inférence, nous pouvons ainsi déduire plusieurs formules (théorèmes), qui nous donnent pour l'ensemble des configurations de plus de 4 allumettes le nom du joueur gagnant.

L'ordinateur démontre tout

À l'aide d'un ordinateur, on peut s'affranchir du côté mécanique du système formel pour qu'il applique systématiquement les 8 règles à l'ensemble des théorèmes lorsque c'est possible.
Partant des 2 axiomes de base, et en appliquant les règles applicables à chacun d'eux, il démontre les 8 formules suivantes : AA5, AA6,AA7, AB8, BB5, BB6, BB7, BA8
Puis en réappliquant les règles (quand c'est possible) à nos 8 nouveaux théorèmes, la machine peut démontrer 8 nouveaux théorèmes, et ainsi de suite, car le processus ne s'arrête jamais.

Consistance, complétude...

Nous avons vu que les formules possédaient des négations. la négation de AA5 (notée non(AA5)) est BA5. En effet, soit l'un soit l'autre des joueurs a la possibilité de gagner de façon sûre dans n'importe quelle configuration. Choisissons une formule (par exemple AB7654) de notre système, et attendons infiniment longtemps (en théorie) pour voir si l'ordinateur la démontre. Quatre cas peuvent se présenter :

1. Il démontrera AB7654 et pas BB7654 (la négation de AB7654)
2. Il démontrera BB7654 , et pas la formule AB7654
3. Il démontrera la formule AB7654 et la formule BB7654
4. Il ne démontrera ni AB7654 , ni BB7654

Les 2 premiers cas ne posent pas de problème. En revanche, si le troisième se présentait nous pourrions dire que le système est inconsistant. En effet, il permet de démontrer une chose et son contraire. Il est bien évident que dans toute configuration (ici B7654) il est impossible que les 2 joueurs aient une stratégie gagnante à la fois...
Le quatrième cas pose aussi un problème. Si vous étudiez mieux le jeu, vous verrez facilement que dans toutes configuration, un des joueurs a une stratégie gagnante. Par conséquent, nous savons que soit AB7654, soit BB7654 est vraie (en l'occurrence, c'est AB7654). Si le quatrième cas se présentait, nous pourrions dire que le système formel est incomplet, car il existerait certaines vérités qu'il ne permet pas de démontrer.

Bien entendu, dans notre exemple simple, le système est en fait consistant et complet, c'est à dire qu'il ne permet pas de démontrer une chose et son contraire, et qu'il permet de démontrer toutes les formules qui sont vraies.

Mais il n'en est pas de même pour tous les systèmes. Le travail de Gödel a consisté à démontrer que dans les systèmes formels suffisament complexes pour contenir l'arithmétique :

- on ne peut pas simplement démontrer la consistance ;

- si le système formel est consistant, alors il est incomplet

Accueil | Biographie | Tout sur le théorème | Conséquences du théorème | Le théorème d'un peu plus près | Le jeu des allumettes | Pour en savoir plus

Le Théorème de Gödel : En savoir plus

- Biographie de Gödel
    - Une biographie très complète de Gödel.
    - Des précisions sur la vie de Gödel après 1942.
    - Des photos de Kurt Gödel

- Pages personnelles
    - La page personnelle Douglas Hofstadter, l'auteur du livre Gödel, Escher, Bach : les brins d'une guirlande éternelle

- Pages scientifiques
    - The Kurt Gödel Society
    - Chaque année, le prix Gödel est attribué au meilleur article de recherche en informatique théorique... Vous voulez postuler ?
    - G.J. Chaitin est un mathématicien s'intéressant à la théorie de la complexité et au hasard. On trouvera dans cet article des précisions sur les travaux de Gödel et de Turing.
    - Une page de Damjan Bojadziev sur les implications du théorème de Gödel (en particulier sur la comparaison cerveau/machine fort répandue)
    - La théorie des ensembles depuis l'antiquite jusqu'a Gödel
    - Un cours complet traitant du théorème de Gödel.
    - Certain déduisent beaucoup de choses du théorème de Gödel... Faut−il tout prendre au sérieux ?

- Divers
    - Une page regroupant ce qu'ont dit certains auteurs sur le théorème d'incomplétude de Gödel.

- Livres
    - Le Théorème de Gödel − Nagel, Newman, Gödel

- Gödel, Escher, Bach, les brins d'une guirlande éternelle − Douglas Hofstadter

Accueil | Biographie | Tout sur le théorème | Conséquences du théorème | Le théorème d'un peu plus près | Le jeu des allumettes | Pour en savoir plus