***NOM:*...**

ISEM3 **le 29 Novembre 1999**
DEVOIR SURVEILLE
Durée: 2^{h}
Sans Document
Avec Calculatrice

MECANIQUE QUANTIQUE

I. Questions

Cochez la réponse correcte à chaque question. Il se peut que vous ne puissiez pas répondre à la question (pas de réponse correcte proposée). Dans ce cas, ou si vous ne trouvez pas la réponse, cochez la case "pas de réponse". Ne laissez en aucun cas toutes les cases vides. Le barème utilisé sera le suivant:

"pas de réponse" cochée:	*0 point*
réponse correcte:	*+1.5 point*
réponse incorrecte ou aucune case cochée:	*-0.5 point*

1. Deux opérateurs observables qui commutent:

- ont un ensemble complet de vecteurs propres en commun ☐
- ont les mêmes vecteurs propres ☐
- ont les mêmes valeurs propres ☐
- ont les mêmes vecteurs propres pour des valeurs propres différentes ☐
- pas de réponse ☐

2. Si les deux opérateurs observables associés à deux grandeurs physiques A et B ne commutent pas:

- la mesure de l'une entraîne la connaissance de l'autre ☐
- la mesure de l'une est sans effet sur la mesure de l'autre ☐
- les distributions statistiques de leurs mesures sont corrélées ☐
- l'écart-type sur la mesure de l'une est proportionnel à l'écart-type sur la mesure de l'autre ☐
- pas de réponse ☐

3. Les valeurs mesurables de la composante d'un moment cinétique $\hat{\vec{J}}$ suivant un axe quelconque sont:

- des combinaisons linéaires des valeurs quantifiées de $\vec{J}$ suivant Ox, Oy et Oz ☐
- quantifiées entre 0 et $j(j+1)\hbar^2$ où j est un entier positif ou nul ☐
- des valeurs entières ou demi-entières de $\hbar$ ☐
- égales à $\sqrt{j(j+1)}\hbar$ où j est entier positif ou nul ☐
- pas de réponse ☐

4. L'énergie d'une particule de masse m astreinte à se déplacer suivant l'axe Ox et soumise de la part du point O à une force de rappel proportionnelle (constante k) à sa distance x au point O est (l'origine des énergies potentielles est prise en 0):

- non quantifiée car la particule est libre sur l'axe Ox ☐
- quantifiée en niveaux équidistants pour E>0 ☐
- égale à un nombre entier de fois $\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}$ ☐
- égale à $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}$ où n est un entier positif ou négatif ☐
- pas de réponse ☐

5. Les niveaux d'énergie des états stationnaires d'une particule de masse m située dans un puits fini de potentiel de largeur L et de profondeur V_0 sont:

- indépendants de V_0 ☐
- indépendants de L ☐
- indépendants du fait que le puits est de profondeur finie ☐
- associés à des états libres ☐
- pas de réponse ☐

6. On considère une particule dans un état quelconque $|\Psi\rangle$ et l'état propre $|n\rangle$ associé à une valeur propre non dégénérée a_n d'un opérateur observable $\hat{A}$ associé à une grandeur physique A.

- une mesure de A ne donne a_n que si $|\Psi\rangle = |n\rangle$ ☐
- la probabilité de mesurer $A=a_n$ est donnée par $|\langle n|\Psi\rangle|^2$ ☐
- après une mesure quelconque de A, l'état du système est $|n\rangle$ ☐
- l'évolution temporelle du système ne dépend pas du fait de mesurer A ☐
- pas de réponse ☐

7. Lorsqu'une particule se trouve dans un état stationnaire:

- sa fonction d'onde ne dépend pas du temps ☐
- l'état du système est un état propre de l'Hamiltonien indépendant du temps ☐
- la probabilité de présence de la particule ne dépend pas de la position ☐
- la valeur moyenne de la position de la particule peut quand même dépendre du temps ☐
- pas de réponse ☐

8. Lorsqu'une particule se trouve dans un état libre ou de diffusion:

- son énergie n'est pas quantifiée ☐
- l'état de la particule n'est pas stationnaire ☐
- la probabilité de présence ne dépend plus de la position ☐
- on ne peut plus lui associer un paquet d'ondes ☐
- pas de réponse ☐

9. La fonction d'onde d'une particule située dans un puits de potentiel central:

- ne dépend que de la distance r à l'origine ☐
- est solution de l'équation angulaire ☐
- est une harmonique sphérique $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ ☐
- est un état propre commun aux trois composantes du moment cinétique orbital ☐
- pas de réponse ☐

NOM:..

Problème: Particule dans un puits carré sphérique tridimensionnel infiniment profond
($\approx$ 8 points)

Une particule de masse m est soumise à l'action d'un potentiel V(r) tel que:

$$V = 0 \quad si \quad |\vec{r}| < a$$
$$V = \infty \quad si \quad |\vec{r}| > a$$

1. Etude du spectre d'énergie

1.1 Ecrire l'équation de SCHRODINGER dépendante, puis indépendante du temps t pour cette particule. Justifier que les solutions stationnaires se mettent sous la forme:

$$\Phi(\vec{r},t) = \Psi(\vec{r}).\chi(t)$$

et préciser la forme de $\chi(t)$

Equation de SCHRODINGER dépendante du temps
Equation de SCHRODINGER indépendante du temps
Justification de la forme des solutions $\chi(t) =$

1.2 On cherche des solutions pour $\Psi(\vec{r})$ ne dépendant que de $r = |\vec{r}|$ s'écrivant: $\Psi(r) = \dfrac{u(r)}{r}$.

Quelle est l'homogénéité de u(r)?

Que vaut u(0)?	u(0)=

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle vérifiée par u(r) et en déduire la forme générale des solutions mathématiques pour $\Psi(r)$.

Résolution
Forme générale des solutions pour u(r)
Forme générale des solutions pour $\Psi(r)$

1.3. Trouver alors les valeurs permises de l'énergie E_n et les fonctions propres φ_n correspondantes, que l'on veillera à normer. S'agit-il d'états libres ou d'états liés?

Raisonnement pour obtenir E_n
Fonctions propres φ_n normées
Etats libres….…….. ☐ Etats liés………….. ☐

2. Interprétation statistique

2.1. A l'instant t=0, la particule se trouve maintenant dans l'état normé suivant:

$$\Phi(r,0) = \sqrt{\frac{4}{5a\pi}}\ \frac{\sin^3\left(\frac{\pi r}{a}\right)}{r}$$

Développer la fonction $\Phi(r,0)$ sur les fonctions propres φ_n de l'Hamiltonien et en déduire la fonction d'onde $\Phi(r,t)$ à l'instant t.

$\Phi(r,0) =$
$\Phi(r,t) =$

2.2 Calculer à l'instant t la valeur moyenne $\overline{E}$ de l'énergie de la particule. Donner une signification à cette valeur moyenne.

$\overline{E} =$

On pourra utiliser le résultat mathématique suivant:

$$Si\ \ I_n = \int_0^\pi \sin^n(x)\,dx\ ,\ alors\ pour\ n \geq 2\quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées sphériques:

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}$$