<u>Corrigé du devoir surveillé M3 de mécanique quantique du 19 novembre 2001</u>

<u>Cours :</u> La norme du moment cinétique peut prendre les valeurs quantifiées $\sqrt{j(j+1)}\ \hbar$ où j est un entier ou un demi-entier positif ou nul. On obtient donc comme seule possibilité j=2 pour avoir j(j+1)=6. La mesure d'une des composantes de ce moment cinétique peut alors donner une des valeurs suivantes : $-2\hbar$, $-\hbar$, 0 , $\hbar$, $2\hbar$ (soit une valeur $m\hbar$ avec $-j \leq m \leq +j$).

<u>Exercice 1: Conservation de la norme</u>

1. Equation donnant l'évolution temporelle de $|\psi\rangle$: $i\hbar \dfrac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle$.

2. Equation vérifiée par $\langle\psi|$: $-i\hbar \dfrac{\partial\langle\psi|}{\partial t} = \langle\psi|\hat{H}^{+}$

3. Le produit hermitien $N = \langle\psi|\psi\rangle$ doit valoir 1 pour que l'on puisse faire des prédictions probabilistes sur le résultats de mesures effectuées sur des systèmes dans l'état $|\psi\rangle$. On parle d'état normé.

4. $\dfrac{dN}{dt} = \langle\psi|\left(\dfrac{\partial|\psi\rangle}{\partial t}\right) + \left(\dfrac{\partial\langle\psi|}{\partial t}\right)|\psi\rangle = \dfrac{1}{i\hbar}\left(\langle\psi|\hat{H} - \hat{H}^{+}|\psi\rangle\right) = 0$ car $\hat{H} = \hat{H}^{+}$.

L'hermiticité de l'opérateur Hamiltonien assure la conservation de la norme dans le temps.

<u>Exercice 2: Evolution dans le temps d'une particule dans un puits</u> *(≈ 12 points)*

1. Fonctions propres $\varphi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}} \sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{a}} \sin(k_n x)$

Valeurs propres associées : $E_n = \dfrac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \dfrac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$ où n est un entier strictement positif.

Les valeurs E_n représentent les valeurs mesurables de l'énergie.

2. Solutions stationnaires normées $\Psi_n(x,t) = \exp\left(-\dfrac{iE_n t}{\hbar}\right)\varphi_n(x)$.

3. C vaut $\sqrt{\dfrac{2}{a}}$ pour que $\Phi(x,0)$ soit normée. L'état de la particule à t=0 peut s'exprimer comme:

$\Phi(x,0) = \dfrac{\varphi_1(x) + \sqrt{2}\ \varphi_2(x)}{\sqrt{3}}$ pour 0<x<a et $\Phi(x,0) = 0$ ailleurs.

A l'instant t>0, l'état $\Phi(x,t)$ de la particule est $\Phi(x,t) = \dfrac{e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\varphi_1(x) + \sqrt{2}\ e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\varphi_2(x)}{\sqrt{3}}$.

4. La densité de probabilité de présence p(x,t) de la particule en un point x est :

$$p(x,t) = \Phi^*(x,t)\Phi(x,t) = \underbrace{\frac{1}{3}|\varphi_1(x)|^2 + \frac{2}{3}|\varphi_2(x)|^2}_{p_0} + \underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{3}\varphi_1(x)\varphi_2(x)}_{p_1}\cos\left(\underbrace{\frac{E_2 - E_1}{\hbar}t}_{2\pi\frac{t}{T}}\right)$$

La période T est donc : $T = \dfrac{2\pi\hbar}{E_2 - E_1} = \dfrac{4ma^2}{3\pi\hbar}$.

5. En interprétant T comme le temps que met la particule (ou le paquet d'onde associé) pour faire un aller-retour entre les parois du puits, on en déduit que $v_G = \frac{2a}{T} = \frac{3\pi\hbar}{2ma}$.

On pouvait calculer directement v_G par sa définition :

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{1}{\hbar}\frac{E_2 - E_1}{k_2 - k_1} = \frac{\hbar}{2m}\left(k_1 + k_2\right) = \frac{3\pi\hbar}{2ma}.$$

6. Mesure de l'énergie de la particule à l'instant t :

E_1 (probabilité 1/3) état après la mesure : $\Phi(x,t') = e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\varphi_1(x)$

E_2 (probabilité 2/3) état après la mesure : $\Phi(x,t') = e^{-i\frac{E_{21} t}{\hbar}}\varphi_2(x)$

Valeur moyenne $\overline{E} = \langle\Phi|\hat{H}|\Phi\rangle = \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_2 = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ et

Ecart type $\Delta E = \sqrt{\left\langle\hat{H}^2\right\rangle - \left\langle\hat{H}\right\rangle^2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\sqrt{2}$

Car $\left\langle\hat{H}^2\right\rangle = \frac{1}{3}E_1^2 + \frac{2}{3}E_2^2 = 11\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\right)^2$