ISEM3 **le 19 novembre 2001**
DEVOIR SURVEILLE
Durée: 1^h30
Sans document
Avec Calculatrice

MECANIQUE QUANTIQUE

Cours : *(≈ 3 points)* La mesure de la norme du moment cinétique effectuée sur un grand nombre de particules identiques a donné de façon systématique la valeur $\sqrt{6}\,\hbar$. Qu'aurait pu donner la mesure d'une des composantes du moment cinétique de ces particules (suivant l'axe Ox par exemple). Justifiez votre réponse.

Exercice 1: Conservation de la norme *(≈ 5 points)*
Soit un système quantique dont l'état est représenté par un ket $|\psi\rangle$ et dont l'Hamiltonien est $\hat{H}$.

1. Rappeler l'équation donnant l'évolution temporelle de $|\psi\rangle$.
2. En déduire l'équation vérifiée par $\langle\psi|$.
3. Que doit valoir le produit hermitien $N = \langle\psi|\psi\rangle$ pour que l'on puisse faire des prédictions probabilistes sur le résultat de mesures effectuées sur des systèmes dans l'état $|\psi\rangle$.
4. Développer $\dfrac{dN}{dt}$ à l' aide des résultats du 1/ Et du 2/Quelle propriété de l'opérateur Hamiltonien assure la conservation de la norme dans le temps ?

Exercice 2: Evolution dans le temps d'une particule dans un puits *(≈ 12 points)*
Soit une particule de masse m astreinte à se déplacer le long de l'axe Ox dans un puits infini unidimensionnel de largeur a (l'énergie potentielle est V=0 entre x=0 et x=a et est prise infinie ailleurs).

1. Donner l'expression des fonctions propres $\varphi_n(x)$ normées de l'Hamiltonien $\hat{H}$ et les valeurs propres E_n associées. Que représentent les valeurs E_n d'un point de vue expérimental ?

2. En déduire les solutions stationnaires normées $\Psi_n(x,t)$ de l'équation de Schrödinger pour une particule dans ce puits.

3. L'état de la particule à t=0 est: $\Phi(x,0) = C\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) + \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{2\pi x}{a}\right)}{\sqrt{3}}$ pour 0<x<a et $\Phi(x,0) = 0$ ailleurs. Que vaut C pour que $\Phi(x,0)$ soit normée? Calculer l'état $\Phi(x,t)$ de la particule à l'instant t>0.

4. Montrer que la densité de probabilité de présence p(x,t) de la particule en un point x est une fonction périodique du temps de la forme : $p(x,t) = p_0 + p_1\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right)$ où p_0 et p_1 sont deux constantes dépendant de x à préciser, de même que la période T en fonction de a.

5. En interprétant T comme le temps que met la particule (ou le paquet d'onde associé) pour faire un aller-retour entre les parois du puits, en déduire le lien entre T et la vitesse de groupe v_G du paquet d'ondes, puis l'expression de v_G en fonction de a. Montrer que l'on pouvait calculer directement v_G par sa définition $v_G = \dfrac{d\omega}{dk} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$.

6. Que pourrait donner comme résultat et avec quelle probabilité la mesure de l'énergie de la particule à l'instant t? Préciser alors l'état de la particule après la mesure. Quels seraient également la valeur moyenne $\overline{E}$ et l'écart type ΔE d'un grand nombre de mesures de l'énergie effectuées sur des particules identiques dans l'état $\Phi(x,t)$ à l'instant t.