ISEM3 **le 23 octobre 2000**
DEVOIR SURVEILLE
Durée: 2^h
Sans Document
Avec Calculatrice

MECANIQUE QUANTIQUE

Exercice 1: Dualité onde-corpuscule pour des atomes d'Hélium et des électrons (≈ 6 points)

Considérons de l'Hélium gazeux à température ordinaire (300K). Ce gaz est monoatomique et l'énergie cinétique moyenne E_{cin} d'un atome d'Hélium dans le gaz à la température T est donnée par : $E_{cin} = \frac{3}{2}kT$.

1. Calculer la vitesse moyenne (en m/s) des atomes d'Hélium.

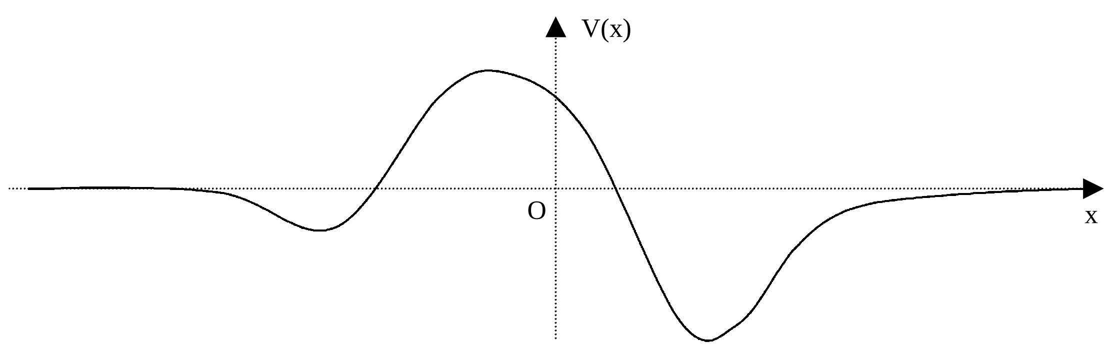
2. Calculer la longueur d'onde moyenne de De Broglie correspondant à cette vitesse moyenne.

3. Comparer cette valeur à la distance moyenne entre atomes dans le gaz qui à la pression ambiante ($P=1atm=10^5$ Pa) et à température ambiante peut être estimée à 3.46 nm. Que pouvons-nous déduire de cette comparaison ?

4. Faire la même comparaison entre la longueur d'onde de De Broglie et la distance moyenne entre électrons pour un « gaz » d'électrons dans un morceau de Cuivre. Certains modèles considèrent que les électrons forment effectivement dans un métal un « gaz » juste comme les atomes d'Hélium dans un récipient. En supposant qu'un électron par atome de cuivre peut se déplacer librement dans le réseau, la distance moyenne entre électrons est alors simplement la distance moyenne entre atomes du Cuivre qui vaut 0.255nm.

Exercice 2: Réflexion et Transmission sur un potentiel quelconque. (≈ 6 points)

Considérons le mouvement d'une particule dans un potentiel «arbitraire » tel que celui de la figure ci-dessous. La fonction énergie potentielle V(x) tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Supposons qu'une particule incidente d'énergie E>0 vienne de $-\infty$ (de la gauche).



1. Montrer que la fonction d'onde d' un état stationnaire doit être de la forme $\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ pour x très négatif et de la forme: $\Psi(x) = Ce^{ikx}$ pour x très positif. Préciser k.

2. Pour déterminer les coefficients B et C en fonction de A, nous devrions résoudre l'équation de Schrödinger dans le potentiel V(x). Nous avons été conduits à interpréter $\left|\frac{B}{A}\right|^2$ et $\left|\frac{C}{A}\right|^2$ respectivement comme des coefficients de réflexion et de transmission. Quelle relation doivent-ils alors logiquement vérifier ?

3. Ceci soulève une intéressante question de principe. Est-il réellement vrai que cette dernière relation s'applique pour *toutes* les fonctions énergie potentielle V(x) ? On se propose de le démontrer. Pour ce faire, considérons la fonction :

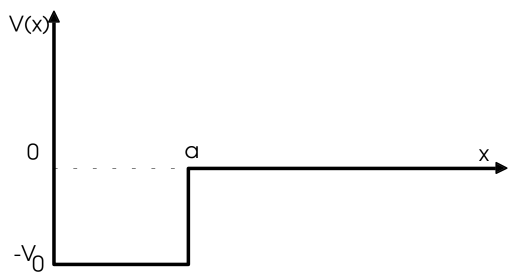
$$F(x) = \Psi^*(x)\frac{d\Psi(x)}{dx} - \Psi(x)\frac{d\Psi^*(x)}{dx}$$

- montrer que si $\Psi(x)$ vérifie l'équation de Schrödinger indépendante du temps, alors $\frac{dF}{dx} = 0$;
- qu'en déduire pour $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$?
- conclure.

<u>Exercice 3: Puits de potentiel et deutéron</u> (≈ 8 points)

Une particule de masse m se déplace sur un axe Ox en étant soumise au potentiel suivant:

$$\begin{cases} V(x) = \infty \ pour\, x \le 0 \\ V(x) = -V_0 \ pour\, 0 < x \le a \\ V(x) = 0 \ pour\, a < x \end{cases}$$



1. Résoudre l'équation de Schrödinger pour les états liés stationnaires de la particule (c'est à dire pour des énergies E comprises entre $-V_0$ et 0). Exprimer et discuter les conditions aux limites et les conditions de continuité imposées à la fonction d'onde, que l'on exprimera en fonction de $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E)}$ et $K = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$, sans chercher nécessairement à déterminer les constantes d'intégration.

2. En déduire les niveaux d'énergie discrets de ce puits de potentiel. On remarquera qu'ils sont donnés par les solutions de l'équation transcendante suivante:

$$\tan(ka) = -\frac{ka}{\sqrt{\alpha^2 - (ka)^2}}\text{ , avec } 0<ka<\alpha$$

où α est un paramètre <u>à préciser</u>, mais qu'une méthode graphique très simple permet une discussion immédiate.

3. Montrer qu'une certaine inégalité simple doit être vérifiée entre la profondeur V_0 et la largeur a du puits pour qu'il existe au moins <u>un</u> état lié.

4. Préciser le nombre et la valeur approximative des niveaux d'énergie dans le cas suivant:
V_0=41.6MeV, a=1.85x10^{-15}m, m=0.85x10^{-27}Kg (cas du noyau de deutérium).

Liste de valeurs numériques utiles:

Constante de Planck réduite:	$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ J.s
Constante de Planck :	$h = 6.62 \times 10^{-34}$ J.s
Masse de l'électron:	$m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg
Masse de l'atome d'Hélium:	$M_{He} = 6.647 \times 10^{-27}$ Kg
Masse de l'atome de Cuivre:	$M_{Cu} = 1.055 \times 10^{-25}$ Kg
Densité volumique du Cuivre:	$\rho_{Cu} = 8970$ Kg/m^3
Electron-Volt:	1 eV = 1.6×10^{-19} J
1MeV=10^6eV	
Vitesse de la lumière dans le vide:	$c = 3 \times 10^8$ ms^{-1}
Constante des gaz parfaits:	R=8.314 J/K/mol
Nombre d'Avogadro	$N_0 = 6.022 \times 10^{23}$ mol^{-1}