ISEM3 **le 27 novembre 2000**
DEVOIR SURVEILLE
Durée: 2^{h}
Sans Document
Avec Calculatrice

<u>MECANIQUE QUANTIQUE</u>

<u>Exercice 1: Opérateurs et grandeurs physiques</u> (≈ 12 points)

Soit **E** l'espace des états accessibles par une particule, engendré par la base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. Une grandeur physique A est représentée par un opérateur observable $\hat{A}$ et une seconde grandeur physique B par un opérateur observable $\hat{B}$. Les matrices de $\hat{A}$ et de $\hat{B}$ dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ sont données par:

$$[\hat{A}] = \begin{bmatrix} 0 & i\sigma \\ -i\sigma & 0 \end{bmatrix} \quad [\hat{B}] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}$$

σ étant une grandeur physique réelle.

1. Peut-on mesurer simultanément A et B?

2. A l'instant t=0, le système se trouve dans l'état $|1\rangle$. On effectue alors une mesure de A. Donner sous forme de tableau les valeurs possibles, leurs probabilités et les états du système après cette mesure.

3. Donner un sens et calculer la valeur moyenne $\langle \hat{A} \rangle$ dans l' état $|1\rangle$, ainsi que l'écart quadratique moyen $\Delta\hat{A}$.

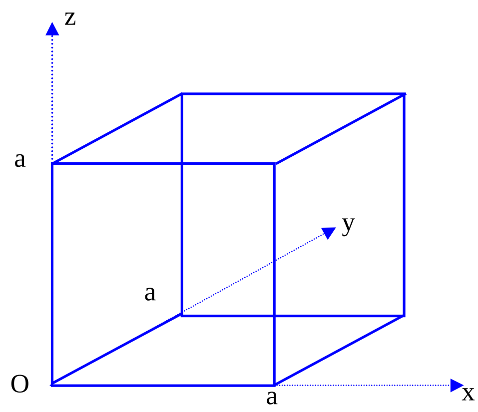
4. On effectue alors une mesure de B sur les systèmes sur lesquels on a mesuré A. Donner sous forme d'arborescence les valeurs possibles, leurs probabilités et les états du système après cette mesure.

5. Enfin on réalise une seconde mesure de A sur les systèmes sur lesquels on a mesuré B. Donner sous forme d'arborescence les valeurs possibles et leurs probabilités. Commenter votre résultat.

6. L'Hamiltonien du système étant donné par $\hat{H} = \alpha\,\hat{A}$, l'état du système étant de nouveau $|1\rangle$ à t=0, préciser l'état $|t\rangle$ du système à un instant t ultérieur.

<u>Exercice 2: Particule dans une boite</u> (≈ 8 points)

On considère une particule de masse m se déplaçant <u>librement</u> et <u>sans interaction</u> à l'intérieur d'une boîte cubique d'arête 'a' (voir ci-dessous), <u>mais dont elle ne peut pas sortir</u>.



1. Modéliser l'énergie potentielle $V(\vec{r})$ dont dérive le champ de force auquel est soumise cette particule et qui correspond à la description de l'énoncé.

2. Calculer les valeurs mesurables de l'énergie totale E de cette particule (On exprimera E en fonction de $E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$). Montrer qu'elle dépend de trois nombres quantiques n_x, n_y, n_z à préciser. Donner la dégénérescence des trois premiers niveaux.

Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles obtenue, on pourra utiliser la méthode de la séparation des variables en cherchant des solutions de la forme:

$$\Psi(x, y, z) = X(x).Y(y).Z(z)$$

3. Calculer le module de la vitesse de la particule en fonction de a et des nombres quantique n_x, n_y, n_z. Une particule enfermée dans un espace tridimensionnel peut-elle être au repos?

4. <u>Application Numérique</u>: calculer la vitesse d'un proton se trouvant dans l'état fondamental à l'intérieur d'un noyau atomique (pour lequel on prendra $a=10^{-14}$m).

<u>Liste de valeurs numériques utiles</u>:

Constante de Planck réduite: $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ J.s
Constante de Planck : $h = 6.62 \times 10^{-34}$ J.s
Masse du Proton: $m = 1.67 \times 10^{-27}$ Kg
Electron-Volt: 1 eV = 1.6×10^{-19} J
1MeV=10^6eV
Vitesse de la lumière dans le vide: $c = 3 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$