ISEM3 **le 18 janvier 2001**
EXAMEN
Durée: 4^h
Sans Document
Avec Calculatrice

MECANIQUE QUANTIQUE

Les quatre exercices sont indépendants et à rédiger sur des copies séparées.
Il n'est pas obligatoire de terminer complètement les quatre exercices pour obtenir le maximum des points.

Exercice 1: Application de la méthode variationnelle à l'atome d'Hydrogène (*≈ 6 points*)

On considère un atome d'Hydrogène. On appelle m la masse réduite du système électron-proton et r la distance entre l'électron et le proton.

1. Quel est l'Hamiltonien de ce système ? Quels sont les nombres quantiques associés aux solutions et quels valeurs peuvent-ils prendre ? Préciser les valeurs de ces nombres quantiques pour le niveau fondamental. Quelle est la symétrie du niveau fondamental et comment se simplifie l'Hamiltonien dans ce cas?

2. Déterminer, par la méthode variationnelle, l'énergie approchée du fondamental de l'atome d'Hydrogène en prenant comme fonction d'essai :

$$\Psi(r) = A\exp\left(-\beta r^2\right)$$

où β est le paramètre variationnel.

On montrera que le paramètre β optimisé est celui qui minimise une fonction du type :

$$a\beta - b\sqrt{\beta} = 0$$

On rappelle que :

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2(\sin\theta)^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) - \frac{\hat{\vec{L}}^2\Psi}{r^2}$$ où $\hat{\vec{L}}$ est l'opérateur moment cinétique orbital.

$$\int_0^\infty x^{2n}\exp\left(-\alpha x^2\right)dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}\alpha^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$ pour n entier >0 et $$\int_0^\infty \exp\left(-\alpha x^2\right)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Exercice 2: Atome d'Hydrogène soumis à un champ magnétique (*≈ 6 points*)

On soumet un atome d'Hydrogène à un champ magnétique $\vec{B}$ dirigé suivant l'axe Oz du référentiel. En plus de l'effet Zeeman (terme $\hat{H}_2$), il existe un couplage entre le moment cinétique orbital $\hat{\vec{L}} = \hbar\hat{\vec{\ell}}$ et le moment cinétique de spin $\hat{\vec{S}} = \hbar\hat{\vec{s}}$ (terme $\hat{H}_1$ dit couplage spin-orbite). L'Hamiltonien du système s'écrit :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2$$

où $\hat{H}_0$ est l'Hamiltonien « habituel » (sans champ $\vec{B}$) de l'atome d'hydrogène isolé, dont on connaît les solutions que l'on notera $\psi^{\pm}_{n\ell m}$, le terme ± repérant l'état de spin . De plus :

$$\hat{H}_1 = \lambda\,\hat{\vec{\ell}}.\hat{\vec{s}} \qquad \text{où } \lambda \text{ est une constante homogène à une énergie}$$

$$\hat{H}_2 = +\mu_B \vec{B}\left(\hat{\vec{\ell}} + 2\hat{\vec{s}}\right) \quad \text{où } \mu_B \text{ est le magnéton de Bohr } (\mu_B>0)$$

1. Exprimer $\hat{\vec{\ell}}.\hat{\vec{s}}$ en fonction de $\hat{\ell}^+$, $\hat{\ell}^-$, $\hat{\ell}_z$, $\hat{s}^+$, $\hat{s}^-$, $\hat{s}_z$. Calculer au premier ordre l'effet de la « perturbation » $\hat{H}_1 + \hat{H}_2$ sur le niveau fondamental ($\hat{H}_1 + \hat{H}_2 << \hat{H}_0$).

2. Quel est la dégénérescence du premier niveau excité? On considère l'effet de la perturbation sur le premier niveau excité lorsque $\vec{B}$ est assez fort pour que $\hat{H}_1 << \hat{H}_2 << \hat{H}_0$. On néglige alors complètement le terme d'interaction spin-orbite $\hat{H}_1$. Calculer l'effet du terme Zeeman $\hat{H}_2$ sur le premier niveau excité. Préciser en combien de sous-niveaux se scinde le premier niveau excité, la dégénérescence de ces derniers et les fonctions propres associées.

Rappel : si $\hat{\vec{J}} = \hbar\hat{\vec{j}}$ est un opérateur moment cinétique, on peut alors définir deux opérateurs adjoints $\hat{j}^+$ et $\hat{j}^-$ tels que :

$$\hat{j}^{\pm}\left| j,m\right\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\left| j,m\pm 1\right\rangle$$

où les vecteurs $\left| j,m\right\rangle$ sont les vecteurs propres communs à $\hat{\vec{j}}^2$ et à $\hat{j}_z$ pour les valeurs propres j(j+1) et m respectivement.

Exercice 3: Oscillation des neutrinos *(≈ 6 points)*

Les neutrinos sont des particules neutres apparaissant ou disparaissant lors de certaines réactions nucléaires et accompagnant soit les électrons (neutrino ν_e), soit les leptons μ (neutrino ν_μ), ce qui permet de les générer et de les détecter. A l'heure actuelle, les limites expérimentales sur les masses des neutrinos sont compatibles avec l'hypothèse de valeurs nulles. Cependant, certains arguments théoriques montrent qu'il pourrait en être autrement et l'objet de ce problème est de montrer comment on envisage de mesurer leur différence de masse par un effet d'oscillation quantique. Cette théorie est basée sur l'idée que les neutrinos ν_e et ν_μ ne seraient en fait que deux états différents d'une même entité physique que nous appellerons *neutrino*.

On produit dans un accélérateur de particules des neutrinos d'impulsion p déterminée et se propageant en très bonne approximation à la vitesse de la lumière c. Si $\hat{H}$ est l'Hamiltonien d'un neutrino libre d'impulsion p, on désigne par $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ les deux états propres de $\hat{H}$ associés aux énergies E_1 et E_2 :

$$\begin{aligned} \hat{H}|\nu_1\rangle &= E_1|\nu_1\rangle \qquad E_1 = pc + \frac{m_1^2c^4}{2pc} \\ \hat{H}|\nu_2\rangle &= E_2|\nu_2\rangle \qquad E_2 = pc + \frac{m_2^2c^4}{2pc} \end{aligned} \tag{1}$$

où m_1 et m_2 sont les masses des deux états $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ avec par hypothèse $m_1 \neq m_2$, $m_1 > m_2$.
Les états physiques des neutrinos produits lors des réactions nucléaires (production ou détection) ne sont cependant pas $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ mais les combinaisons linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= -\sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

où θ est un angle de « mélange » jusqu'à présent inconnu.

1. Quelle équation donne l'évolution dans le temps d'un état quelconque $|\nu\rangle$ de neutrino ?

2. A l'instant t=0s, on produit un neutrino d'impulsion p dans l'état $|\nu_\mu\rangle$. Calculer $|\nu(t)\rangle$ en fonction de $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$.

3. Quelle est la probabilité P que ce neutrino (produit dans l'état $|\nu_\mu\rangle$ à t=0) soit détecté dans l'état $|\nu_e\rangle$ à l'instant t (c'est ce que l'on appelle *oscillation de l'état du neutrino*). On exprimera le résultat en fonction de θ, c, p, t et $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$.

4. On effectue cette détection sur une cible située à une distance ℓ du point de production. Exprimer la probabilité P en fonction de ℓ.

5. On suppose que le mélange dans (2) est « maximal », c'est à dire que $\theta = \pi/4$. Quelle est la distance ℓ où le nombre de ν_e détectés est maximum en supposant que $\Delta m^2c^4 = 1\ (eV)^2$? *On pourra contrôler la vraisemblance du résultat en se souvenant que l'ordre de grandeur de la taille des accélérateurs actuels est de plusieurs km.*

6. En pratique, les neutrinos sont détectés à 1 km de l'endroit de production. Sachant que l'appareil de détection est sensible à une baisse de 10% du nombre de ν_μ, quelle est la limite sur l'écart $\Delta m^2 c^4$ que l'on peut mesurer par cette méthode ?

Exercice 4: Cas de 2 particules identiques dans un puits infiniment profond unidimensionnel (*≈ 6 points*)

On considère le cas du puits de potentiel infini suivant :

$$\begin{cases} V(x) = \infty \quad pour \;\; x < 0 \;\; et \;\; x > a \\ V(x) = 0 \quad pour \;\; 0 \le x \le a \end{cases}$$

1. Retrouver rapidement les fonctions propres normées $\varphi_n^{\pm}(x)$ et les niveaux d'énergie correspondants E_n de l'opérateur Hamiltonien de ce système pour une particule de masse m et de spin ½, l'indice + ou – repérant l'état de spin de la particule.

2. On considère maintenant le cas de deux particules identiques de même masse m et de spin ½ (fermions) situées dans le puits précédent. On les repérera par les indices 1 et 2, x_1 et x_2 désignant la position des deux particules. Réécrire l'Hamiltonien de ce système de deux particules en supposant qu'elles n'interagissent pas entre elles. En remarquant que l'Hamiltonien est séparable, trouver ses valeurs propres E_{n_1,n_2} et ses fonctions propres $\Psi_{n_1,n_2}(x_1, x_2)$ satisfaisant au principe d'indiscernabilité de particules identiques où n_1 et n_2 sont deux entiers strictement positifs. Préciser le fondamental du système.

3. On admet dans cette question que les deux particules interagissent répulsivement via le potentiel d'interaction suivant: $V(x) = \dfrac{K}{\sqrt{|x_1 - x_2|}}$, où K est une constante positive. En traitant cette modification comme une perturbation, calculer la correction au premier ordre apportée à l'énergie du niveau fondamental du système de deux particules. On utilisera le résultat suivant: $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin^2(u)\sin^2(v)}{\sqrt{|u-v|}} dv\, du = I \approx 4.66$.

Application numérique: calculer le niveau fondamental non perturbé et la correction apportée dans le cas suivant: a=2 10^{-8}cm, K=10^{-4} eV$\sqrt{\text{cm}}$, m=10^{-30}Kg. L'utilisation de la méthode des perturbations est-elle justifiée?

Liste de valeurs numériques utiles:

Constante de Planck réduite: $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ J.s
Constante de Planck : $h = 6.62 \times 10^{-34}$ J.s
Masse de l'électron: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ Kg
Masse du Proton: $m_P = 1.67 \times 10^{-27}$ Kg
Electron-Volt: 1 eV = 1.6×10^{-19} J
1MeV=10^6eV
Vitesse de la lumière dans le vide: $c = 3 \times 10^8 ms^{-1}$